В.В. Вербовский, Б.Ш. Кулпешов

(Институт проблем информатики и управления, г. Алматы, Казахстан

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан)

# О КОММУТАТИВНОСТИ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ ГРУПП

Аннотация

В данной работе мы исследуем свойства слабо циклически минимальных циклически упорядоченных групп. В частности, мы доказываем, что слабо циклически минимальная циклически упорядоченная группа является абелевой.

Ключевые слова: слабая циклическая минимальность, циклически упорядоченная группа, коммутативность.

Кілт сөздер: босаң циклдік минималдық, циклдік реттелген топ, коммутативтік.

Keywords: weak circular minimality, circularly ordered group, commutability.

## 1. Предварительные сведения

Вспомним, что циклическим порядком называется трехместное отношение $K$, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \to K(y, z, x));$

(co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x);$

(co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \to \forall t [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)]);$

(co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \vee K(y, x, z)).$

Отношение $K_0(x, y, z)$ определим как $K(x, y, z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z$.

Подмножество $A$ циклически упорядоченной структуры $N = \langle N, =, K, ... \rangle$ называется выпуклым, если для любых $a, b \in A$ либо любой элемент из $K(a, N, b)$ содержится в $A$, либо любой элемент из $K(b,N,a)$ содержится в $A$. Максимальное выпуклое подмножество некоторого множества $A$ назовем выпуклым компонентом множества $A$.

Вспомним, что группа $G$, снабженная линейным порядком <, называется линейно упорядоченной, если для любых элементов $a,b$ и $c$ из неравенства $a < b$ следуют неравенства $ac < bc$ и $ca < cb$. Назовем группу $G$ линейно упорядочиваемой, если существует такое линейное упорядочение множества элементов из $G$, относительно которого $G$ будет линейно упорядоченной группой. Если же группа $G$ снабжена циклическим порядком $K$, то она называется циклически упорядоченной, если для любых элементов $a,b$, $c$ и $d$ из предложения $K(a,b,c)$ следуют предложения $K(ad,bd,cd)$ и $K(da,db,dc)$.

Легко заметить, что линейно упорядоченная группа является циклически упорядоченной группой, если циклический порядок определен следующим образом:

$$K(x,y,z) := x \le y \le z \vee y \le z \le x \vee z \le x \le y$$

Естественными примерами циклически упорядоченных, но нелинейно упорядоченных групп являются ненулевые подгруппы мультипликативной группы $S^1$ комплексных чисел, равных по модулю единице, при условии, что они содержат элементы конечного порядка. Действительно, умножение в данной группе является поворотом единичной окружности, а поворот не может изменить взаимное расположение трех элементов. Поскольку линейно упорядоченная группа является группой без кручения, рассматриваемые группы не могут быть линейно упорядочены.

Вспомним, что линейно упорядоченная структура $M = \langle M,=,<,\ldots\rangle$ является слабо о-минимальной, если любое параметрически определимое множество является объединением конечного числа выпуклых множеств. В [1] было установлено, что слабо о-минимальные упорядоченные группы являются абелевыми и делимыми.

Следующее понятие введено и первоначально исследовано в [2]. Циклически упорядоченная структура $M = \langle M,=,K,\ldots\rangle$ является слабо циклически минимальной, если любое параметрически определимое множество является объединением конечного числа выпуклых множеств. Вспомним, что такая структура $M = \langle M,=,K,\ldots\rangle$ является циклически минимальной, если любое параметрически определимое множество является объединением конечного числа интервалов и точек. Таким образом, слабая циклическая минимальность является обобщением циклической минимальности. В работе [3] были исследованы циклически минимальные циклически упорядоченные группы; в частности, показано, что они являются абелевыми и делимыми. В настоящей работе мы исследуем слабо циклически минимальные циклически упорядоченные группы и доказываем, что они также являются абелевыми.

## 2. Циклически упорядоченные группы

Здесь и далее, если не оговорено противное, под группой $G$ мы будем понимать циклически упорядоченную группу.

Лемма 2.1. ([3], Лемма 5.3) Для любых элементов $a,b,c\in G$ условие $K_0(a,b,c)$ влечет $K_0(c^{-1},b^{-1},a^{-1})$.

Лемма 2.2. Пусть $A$ – выпуклое подмножество группы $G$. Тогда для любых элементов $a,b\in A$ и $g_1,g_2\in G\setminus A$ $K(g_1,a,b)\Leftrightarrow K(g_2,a,b)$.

Лемма 2.3. Пусть $H$ – собственная выпуклая подгруппа группы $G$, а элемент $g\in G\setminus H$. Тогда $H$ вместе с отношением линейного порядка, задаваемого формулой $x\le y:=K(g,x,y)$, является линейно упорядоченной группой.

Доказательство. Пусть $a,b$ и $c\in H$ такие, что $a\le b$. Тогда истинно предложение $K(gc,ac,bc)$. Элемент $gc$ не лежит в группе $H$, следовательно, в силу Леммы 2.2 предложение $K(gc,ac,bc)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно предложение $K(g,ac,bc)$. По определению получаем, что $ac\le bc$. Путем аналогичных рассуждений можно доказать, что $ca\le cb$.

Лемма 2.4. Пусть $H_1,H_2$ – выпуклые подгруппы циклически упорядоченной группы $G$. Тогда либо $H_1$ – подгруппа группы $H_2$, либо $H_2$ – подгруппа группы $H_1$.

Доказательство. Предположим что $H_1\not\subset H_2$ и $H_2\not\subset H_1$. Тогда не умаляя общности, можем считать, что существуют $g_1\in H_1\setminus H_2, g_2\in H_2\setminus H_1$ и $K_0(g_1,1,g_2)$, т.е. $K_0(1,g_2,g_1)$. Тогда по Лемме 2.1 $K_0(g_1^{-1},g_2^{-1},1)$, т.е. $K_0(1,g_1^{-1},g_2^{-1})$. Если $K_0(1,g_2^{-1},g_2)$, то $g_1^{-1}\in H_2$, противореча тому что $g_1\notin H_2$. Пусть выполняется $K_0(1,g_2,g_2^{-1})$. Если имеем $K_0(g_1,1,g_2,g_2^{-1})$, то $g_1^{-1}\in H_2$. Если $K_0(g_1,g_2,1,g_2^{-1})$, то $g_2^{-1}\in H_1$, противореча тому что $g_2\notin H_1$.

Так как объединение возрастающей цепи групп само является группой, можно определить подгруппу $G^c$ группы $G$ как объединение всех своих собственных выпуклых подгрупп.

Лемма 2.5. Если $G=G^c$, то циклически упорядоченная группа $G$ является линейно упорядочиваемой. Более того, она будет линейно упорядоченной относительно следующего порядка: $x\le y:=P(x^{-1}y)$, где $P(x):=K(1,x,x^2)$.

Доказательство. Тот факт, что группа $G$ является линейно упорядочиваемой, следует из того, что объединение возрастающей цепи линейно упорядоченных групп само является линейно упорядоченной группой. Осталось лишь доказать формульность этого линейного порядка. Заметим, что из линейной упорядочиваемости группы $G$ следует отсутствие элементов конечного порядка.

Возьмем произвольные $a,b \in G$ с условием $a \le b$. Тогда существует собственная выпуклая подгруппа $H$ такая, что $a,b \in H$ и существует $g \in G \setminus H$. По Лемме 2.3 формула $K(x,y,g)$ определяет линейный порядок на $H$. Докажем, что этот порядок совпадает на множестве $H$ с порядком, определенным формулой $K(1,x^{-1}y,x^{-1}yx^{-1}y)$.

Предположим, что формула $K(a,b,g)$ истинна. Тогда умножая слева на $a^{-1}$, имеем: $K(1,a^{-1}b,a^{-1}g)$. Тогда по Лемме 2.2 верна формула $K(1,a^{-1}b,g)$, так как $a^{-1}g \notin H$. Умножая последнюю формулу слева на $a^{-1}b$, имеем: $K(a^{-1}b,a^{-1}ba^{-1}b,a^{-1}bg),$ откуда по Лемме 2.2 истинно $K(a^{-1}b,a^{-1}ba^{-1}b,g).$ Тогда получаем, что и формула $K(1,a^{-1}b,a^{-1}ba^{-1}b)$ истинна.

Предположим теперь, что имеет место $K(1,a^{-1}b,a^{-1}ba^{-1}b)$. Допустим противное: $\models \neg K(a,b,g)$. Тогда поскольку $a \ne b, a \ne g$ и $g \ne b$, имеем $K(b,a,g)$. Умножая слева на $b^{-1}$, получаем $K(1,b^{-1}a,b^{-1}g)$ и по Лемме 2.2 $K(1,b^{-1}a,g)$. Умножая последнюю формулу слева на $b^{-1}a$, имеем: $K(b^{-1}a,b^{-1}ab^{-1}a,b^{-1}ag),$ и по Лемме 2.2 $K(b^{-1}a,b^{-1}ab^{-1}a,g),$ откуда имеем $K(1,b^{-1}a,b^{-1}ab^{-1}a).$ Умножая последнюю формулу слева на $a^{-1}b$, получим: $K(a^{-1}b,1,b^{-1}a)$. Еще раз умножая на $a^{-1}b$, получаем $K(a^{-1}ba^{-1}b,a^{-1}b,1)$. Противоречие.

Таким образом, если $G$ не является линейно упорядочиваемой, то $G^c$ является максимальной выпуклой линейно упорядочиваемой подгруппой.

В книге [4] указан следующий способ построения циклически упорядоченных групп. Пусть $H$ будет линейно упорядоченной группой, содержащей в центре такой элемент $z$, что подгруппа $\{z\}$, порожденная элементом $z$, не ограниченна в группе $H$. Тогда фактор-группу $H/\{z\}$ можно циклически упорядочить, полагая $K_0(a,b,c)$ для смежных классов $a,b,c$ по $\mathrm{mod}\{z\}$, если для единственных представителей $r_a,r_b,r_c$ смежных классов $a,b,c$, удовлетворяющих условию $e \le r_a,r_b,r_c < z$, имеет место одно из следующих отношений: $r_a < r_b < r_c$, $r_b < r_c < r_a$ или $r_c < r_a < r_b$.

Теорема Ригера говорит, что такой способ получения циклически упорядоченных групп является универсальным.

Теорема 2.6. ([4], Теорема 21). Для каждой циклически упорядоченной группы $G$ существует линейно упорядоченная группа $H$ и элемент $z$ центра группы $H$ такие, что $G$ изоморфна циклически упорядоченной фактор-группе $H/\{z\}$, где $\{z\}$ – это подгруппа, порожденная элементом $z$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Гельдера [5] для линейно упорядоченных групп, которая гласит, что любая архимедова линейно упорядоченная группа изоморфно вкладывается в линейно упорядоченную группу вещественных чисел. Вспомним, что циклически упорядоченная группа называется архимедовой, если она не содержит нетривиальных выпуклых подгрупп.

Теорема 2.7. Архимедова циклически упорядоченная группа или является линейно упорядоченной при помощи положительного конуса, определяемого формулой $K(1,x,x^2)$, или изоморфно вкладывается в мультипликативную группу $S^1$ комплексных чисел, равных по модулю единице. Как следствие, она абелева.

Доказательство. Пусть $G$ – циклически упорядоченная архимедова группа. Если $G$ является линейно упорядоченной при помощи положительного конуса, определяемого формулой $K(1,x,x^2)$, то по теореме Гельдера она изоморфна вкладывается в линейно упорядоченную группу вещественных чисел.

Предположим, что группа $G$ не является линейно упорядочиваемой. В силу теоремы Ригера существуют линейно упорядоченная группа $H$ и элемент $z$ центра группы $H$ такие, что $G$ изоморфна циклически упорядоченной фактор-группе $H/\{z\}$. Так как группа не является линейно упорядочиваемой, то элемент $z$ не является единичным. Очевидно, что группа $H$ архимедова. В силу теоремы Гельдера, не умаляя общности, мы можем полагать, что $H$ является подгруппой группы вещественных чисел. Так как умножение на любое положительное вещественное число есть автоморфизм упорядоченной группы вещественных чисел, умножая на число $2\pi/z$, можно положить, что элемент $z$ равен $2\pi$. Вспомним, что при тригонометрическом представлении $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплексных чисел при умножении аргументы $\varphi$ складываются. Тогда очевидно, что фактор-группа $R/\{2\pi\}$ изоморфна мультипликативной группе $S^1$ комплексных чисел, равных по модулю единице. Следовательно, $G$ изоморфно в нее вкладывается. 🕊

Лемма 2.8. Подгруппа $G^c$ является нормальной подгруппой группы $G$.

Доказательство. Пусть $g \in G$. Тогда $\tau(x) = g^{-1}xg$ как автоморфизм группы $G$ должен сохранять такие свойства, как линейная упорядочиваемость подгруппы и ее выпуклость. Следовательно, $\tau(G^c)$ – выпуклая линейно упорядочиваемая подгруппа. По определению подгруппы $G^c$ имеем, что $\tau(G^c) \le G^c$. То же самое верно и для $\tau^{-1}$: $\tau^{-1}(G^c) \le G^c$. Но тогда $G^c = \tau(\tau^{-1}(G^c)) \le \tau(G^c)$. Значит, $\tau(G^c) = G^c$. 🕊

Лемма 2.9. Пусть $H$ – нормальная выпуклая подгруппа группы $G$. Тогда фактор-группа $G/H$ является циклически упорядоченной. В частности, $G/G^c$ является циклически упорядоченной.

Следующее утверждение следует из Теоремы 2.7 и Лемм 2.8 и 2.9:

Следствие 2.10. Фактор-группа $G/G^c$ как циклически упорядоченная группа изоморфно вкладывается в мультипликативную группу комплексных чисел, равных по модулю единице. Как следствие, она абелева.

Лемма 2.11. Пусть $G$ – циклически упорядоченная группа, $H$ – бесконечная подгруппа группы $G$. Пусть $B_i$, где $i \in I$, – все выпуклые компоненты подгруппы $H$, причем выпуклая компонента $B_0$ содержит 1. Тогда $B_0$ – подгруппа группы $H$, а каждый выпуклый компонент $B_i$ является классом смежности по подгруппе $B_0$.

Доказательство. Пусть $b \in B_0$. Тогда весь отрезок $K(1,G,b)$ или весь отрезок $K(b,G,1)$ лежит в $B_0$. Предположим, что имеет место первое. Значит отрезок $K(b^{-1},G,1)$ лежит в $H$. Но $K(b^{-1},G,1) \cup K(1,G,b) = K(b^{-1},G,b)$ – выпуклое подмножество подгруппы $H$, следовательно, $K(b^{-1},G,b) \subseteq B_0$.

Пусть $b$ и $c$ – такие элементы из $B_0$, что имеют место $K(1,b,c)$ и $K(1,G,c) \subseteq B_0$. Тогда $K(1,G,b) \cdot K(1,G,c)$ – выпуклое подмножество подгруппы $H$, и, следовательно, является подмножеством множества $B_0$.

Пусть $B_i$ – произвольный выпуклый компонент подгруппы $H$, а $b_i \in B_i$. Поскольку $b_i B_0$ – выпуклое множество, которое имеет непустое пересечение с $B_i$, в силу максимальности $B_i$ получаем, что $b_i B_0 \subseteq B_i$. Аналогичным образом получаем, что $b_i^{-1} B_i \subseteq B_0$. Следовательно, $b_i B_0 = B_i$. 🕊

Лемма 2.12. Пусть $G$ – циклически упорядоченная группа, а элементы $a,b$ и $c$ лежат в некотором классе смежности $dG^c$, причем верно $K_0(a,b,c)$. Тогда для любого целого ненулевого числа $n$ имеет место $K_0(a^n,b^n,c^n)$.

Доказательство. Вначале заметим, что элементы $a^n, b^n$ и $c^n$ лежат в одном классе смежности по подгруппе $G^c$ для любого положительного целого числа $n$. Кроме того, как было замечено выше, подгруппа $G^c$ является линейно упорядоченной, поэтому на каждом классе смежности $gG^c$ можно ввести линейный порядок следующим образом. Пусть $g_1, g_2 \in gG^c$. Тогда $g_1 \le g_2$, если $g_1 g^{-1} \le g_2 g^{-1}$. Легко заметить, что этот порядок не зависит от выбора представителя $g$ класса смежности $gG^c$. Более того, он устойчив относительно умножения на элементы из $G^c$, т.е. если $g_1 \le g_2$, то $g_1 h \le g_2 h$ и $hg_1 \le hg_2$ для любого элемента $h \in G^c$.

Не умаляя общности, можно считать, что $a <_1 b <_1 c$, где $<_1$ – это линейный порядок на $dG^c$. Мы докажем лемму индукцией по числу $n$. Предположим, что имеет место $a^n <_n b^n <_n c^n$, где $<_n$ – это линейный порядок на $d^n G^c$. Докажем тогда, что $a^{n+1} <_{n+1} b^{n+1} <_{n+1} c^{n+1}$ истинно, где $<_{n+1}$ – это линейный порядок на $d^{n+1}G^c$.

Из свойств циклического порядка следует $K_0(a^{n+1}, ab^n, ac^n)$. Иными словами, имеет место $a^{n+1} <_{n+1} ab^n <_{n+1} ac^n$. Так как $a <_1 b$, то $1 <_1 ba^{-1}$. Тогда $ab^n <_{n+1} ba^{-1}ab^n = b^{n+1}$. Следовательно, $a^{n+1} <_{n+1} b^{n+1}$. Аналогично, так как $b <_1 c$, то $1 <_1 cb^{-1}$, а из свойств циклического порядка следует $K_0(ba^n, b^{n+1}, bc^n)$. Значит, $b^{n+1} <_{n+1} bc^n$ и $bc^n <_{n+1} cb^{-1}bc^n = c^{n+1}$. Следовательно, $b^{n+1} <_{n+1} c^{n+1}$. В итоге имеем неравенство $a^{n+1} <_{n+1} b^{n+1} <_{n+1} c^{n+1}$, что и требовалось доказать. 🕊

Лемма 2.13. Пусть $G$ – циклически упорядоченная группа, а подгруппа $G^c$ абелева. Предположим, что существуют $g \in G$ и положительное целое число $n$ такие, что $g^n \in G^c$. Тогда централизатор $C(g)$ содержит $G^c$ и, как следствие, $g^k G^c$ для любого целого числа $k$.

Доказательство. Пусть $a \in G^c$. Если $g \in G^c$, то в силу коммутативности подгруппы $G^c$ получаем, что $a \in C(g)$. Предположим, что $g \notin G^c$. Так как $G^c$ – упорядочена линейно, не умаляя общности, можно считать что $a > 1$, и, следовательно, $K_0(1, a, g)$. Тогда утверждаем что выполняются $K_0(1, g, ag)$ и $K_0(1, g, ga)$. Действительно, если например, имеет место $K_0(1, ag, g)$, тогда умножая справа на $g^{-1}$, получим $K(g^{-1}, a, 1)$, т.е. $g^{-1} \in G^c$. Предположим, что $ag \ne ga$. Не умаляя общности, можем считать, что имеет место $K_0(g, ag, ga)$. В силу Леммы 2.12 имеет место $K_0(g^n, (ag)^n, (ga)^n)$, то есть $(ag)^n \ne (ga)^n$. Имеем:

$$(ag)^n G^c = (agG^c)^n = (aG^c gG^c)^n = (G^c gG^c)^n = (gG^c)^n = g^n G^c = G^c$$

Следовательно, $(ag)^n \in G^c$. Так как $(ag)^n = a(ga)^{n-1} g$, то в силу того, что $a \in G^c$, имеем $(ga)^{n-1} g \in G^c$. Подгруппа $G^c$ абелева, поэтому $a(ga)^{n-1} g = (ga)^{n-1} ga$, т.е. $(ag)^n = (ga)^n$.

Так как $G^c \subseteq C(g)$ и $g^k \in C(g)$, то очевидно что $g^k G^c \subseteq C(g)$. 🕊

Лемма 2.14. $G$ – циклически упорядоченная группа, а подгруппа $G^c$ абелева. Предположим, что существуют $g_1, g_2 \in G$ такие, что $g_1 G^c$ и $g_2 G^c$ имеют конечный порядок в фактор-группе $G/G^c$. Тогда $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Доказательство. Предположим противное, что существуют элементы $g_1$ и $g_2 \in G$, такие что $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$, но при этом $g_1 G^c$ и $g_2 G^c$ имеют конечный порядок в фактор-группе $G/G^c$. Так как фактор-группа $G/G^c$ абелева по Следствию 2.10, то элементы $g_1 G^c$ и $g_2 G^c$ порождают конечную циклическую группу, которая изоморфна группе $(Z_n, +)$ с естественным циклическим упорядочением. Пусть $hG^c$ будет прообразом $1 \in Z_n$ относительно данного изоморфизма. Тогда существуют такие числа $k_i$, что $h^{k_i} G^c = g_i G^c$, где $i = 1,\ 2$.

Пусть $g_i = h^{k_i} a_i$, где $a_i \in G^c$. Заметим, что $a_1$ и $a_2$, как элементы $G^c$, коммутируют с элементом $h$ и между собой. Тогда $g_1 g_2 = h^{k_1} a_1 h^{k_2} a_2 = h^{k_2} a_2 h^{k_1} a_1 = g_2 g_1$. 🕊

## 3. Слабо циклически минимальные группы

Здесь и далее под слабо циклически минимальной группой мы будем понимать только слабо циклически минимальные циклически упорядоченные группы.

Очевидно, что любая слабо о-минимальная упорядоченная группа является слабо циклически минимальной группой.

Лемма 3.1. Предположим, что $G = \langle G, =, K, \cdot, 1, \ldots \rangle$ – слабо циклически минимальная группа. Тогда структура, индуцированная на подгруппе $G^c$ группы $G$, является слабо о-минимальной относительно линейного порядка $x \leq y := K(1, x^{-1}y, x^{-1}yx^{-1}y)$ в случае, когда $G^c = G$, и относительно линейного порядка $x \leq y := K(g, x, y)$ в случае, когда $G^c$ – собственная подгруппа группы $G$, а элемент $g \notin G^c$. Как следствие, линейно упорядоченная группа $G^c$ абелева.

Доказательство. Линейная упорядоченность группы $G^c$ следует из Лемм 2.3 и 2.5. Остальное очевидно. 🕊

Теорема 3.2. Слабо циклически минимальная группа является абелевой.

Доказательство. Пусть $G$ – слабо циклически минимальная группа. Если $G = G^c$, то, как было доказано выше, $G$ является линейно упорядоченной и слабо о-минимальной, а следовательно и абелевой. Предположим, что $G^c$ – собственная подгруппа группы $G$.

Заметим, что поскольку $G^c$ слабо о-минимальна, она является абелевой и делимой. Если $G^c$ – единичная подгруппа, то группа $G$ архимедова и, таким образом, абелева. Поэтому будем считать, что подгруппа $G^c$ содержит неединичный элемент.

Предположим противное, что группа $G$ не является абелевой.

Лемма 3.3. Если централизатор $C(g)$ некоторого элемента $g \in G$ пересекается с бесконечным числом классов смежности по подгруппе $G^c$, то $C(g) = G$.

Доказательство Леммы 3.3. Рассмотрим централизатор $C(g)$. В силу слабой циклической минимальности $C(g)$ – конечное объединение выпуклых компонент $U_1$, …, $U_n$. Заметим, что элементы $g^k$ и $g^m$ лежат в разных классах смежности по подгруппе $G^c$ при любых разных целых числах $k$ и $m$, но все они лежат в $C(g)$. Следовательно, некоторое выпуклое множество $U_i$ содержит бесконечное число классов смежности по подгруппе $G^c$. Пусть $h_i \in U_i$, а $h_j \in U_j$. Тогда $h_j h_i^{-1} U_i \cap U_j \neq \varnothing$, следовательно, $h_j h_i^{-1} U_i = U_j$. Значит, все выпуклые компоненты содержат бесконечное число классов смежности. С точностью до перенумерации индексов, можно предположить, что $1 \in U_1$.

В силу Леммы 2.11 выпуклый компонент $U_1$ является подгруппой группы $G$. В силу рассуждений $U_1$ содержит бесконечное число классов смежности по подгруппе $G^c$. Тогда $U_1$ не может быть собственной выпуклой подгруппой, т.е. она совпадает с $G$. Откуда $C(g) = G$.

Из доказанной леммы следует

Лемма 3.4. Если фактор-группа $G/G^c$ содержит только элементы бесконечного порядка, то $G$ абелева.

Доказательство Леммы 3.4. Предположим, что элемент $a \in G/G^c$ имеет бесконечный порядок. Пусть $g \in G^c$ – прообраз элемента $a$ относительно естественного гомоморфизма группы $G$ в $G/G^c$. Рассмотрим централизатор $C(g)$. Очевидно, что он удовлетворяет посылкам Леммы 3.3.

Пусть $g_1, g_2 \in G$. Если один из элементов $g_1 G^c$ и $g_2 G^c$ бесконечного порядка в факторгруппе $G/G^c$, то они коммутируют по Лемме 3.3. Если же каждый из них конечного порядка, то их коммутативность следует из Леммы 2.14.

Литература

1 H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

2 B.Sh. Kulpeshov, H.D. Macpherson, Minimality conditions on circularly ordered structures, Mathematical Logic Quarterly, 51 (2005), pp. 377-399.

3 H.D. Macpherson, C. Steinhorn, On variants of o-minimality, Annals of Pure and Applied Logic, 79 (1996), pp. 165-209.

4 Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические структуры, Изд-во Мир, Москва, 1965, 342 стр.

5 O. Holder, Die Axiome Quantitat und die Lehre vom Mass, Ber. Verh. Sachs. Wiss. Leipzig, Math.-Phis. Cl., 53 (1901), pp. 1-64.

Резюме

В.В. Вербовский, Б.Ш. Күлпешов

(Информатика және басқарма мәселесі институты, Алматы, Қазақстан)

(Халықаралық ақпараттық технология университеті, Алматы, Қазақстан)

Босаң циклдік минималдық топтардың коммутативтігі

Босаң циклдік минималдық циклдік реттелген топтардың қасиеттері зерттелген. Соның ішінде кез келген босаң циклдік минималдық циклдік реттелген топтардың коммутативтігі дәлелденеді.

Кілт сөздер: босаң циклдік минималдық, циклдік реттелген топ, коммутативтік.

Summary

V.V. Verbovskiy, B.Sh. Kulpeshov

(Institute of problems of informatics and management, Алматы, Kazakhstan)

(International university of information technologies, Алматы, Kazakhstan)

On commutability of weakly circularly minimal groups

In the present work we study properties of weakly circularly minimal circularly ordered groups. In particular, we prove that a weakly circularly minimal circularly ordered group is abelian.

Keywords: weak circular minimality, circularly ordered group, commutability.

Поступила 05.07.2013 г.